مقاومت مصالح ۲

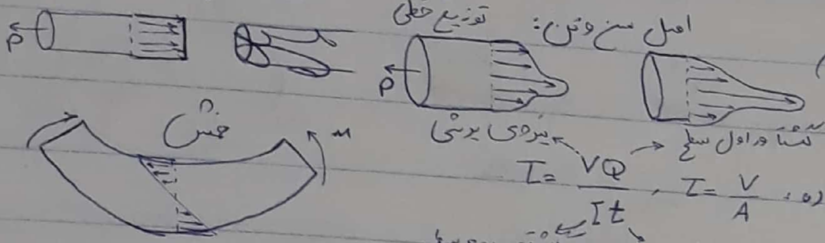
تنش

۱) تنش محوری (نرمال، قائم)
- الف) بارگذاری محوری ← توزیع یکنواخت ← $\sigma = \frac{\pm P}{A}$ ← در خرپا
- ب) بارگذاری خمشی ← در تیرها ← $\sigma = \frac{-My}{I}$ ← توزیع خطی

۲) تنش برشی

۳) تنش تکیه گاهی (لهیدگی)

اصل سن ونان:

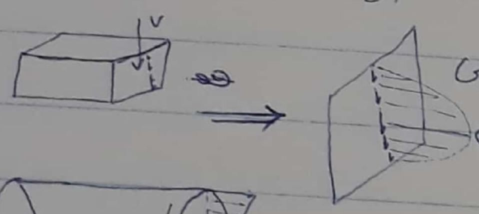


تنش برشی

الف) بارگذاری برشی ساده: $\tau = \frac{V}{A}$, $\tau = \frac{VQ}{It}$

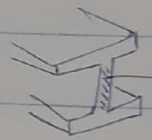
Q: گشتاور اول سطح ، I: گشتاور دوم سطح ، t: ضخامت ، V: نیروی برشی

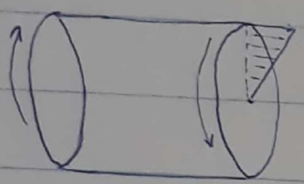
ب) بارگذاری پیچشی: $\tau = \frac{T\rho}{J}$ ← J: ممان اینرسی قطبی



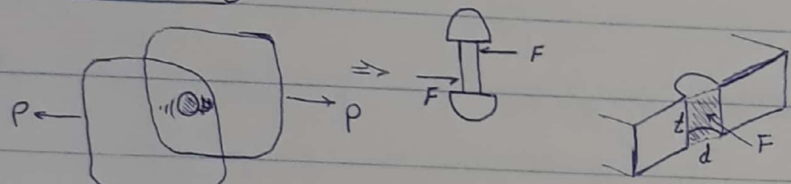
مقطع مستطیل $\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$

مقطع I شکل $\tau_{max} = \frac{V}{A_{\text{جان شکل}}}$



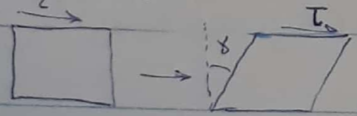


تنش تکیه گاهی: $\sigma_b = \frac{F}{td}$



کرنش ، $\varepsilon = \frac{\delta}{l}$

- کرنش محوری (ε) ← $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ ، $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ ← مدول الاستیسیته
- کرنش زاویه ای (γ) ← $\tau = G\gamma$ ← مدول الاستیسیته برشی



کرنش زاویه ای

ضریب پواسون (ν) = $-\frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}}$

روابط تنش و کرنش

تنش یک بعدی ($\sigma_y = \sigma_z = 0$):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} , \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} , \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E}$$

(ν) ضریب پواسون

تنش دو بعدی ($\sigma_z = 0$):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} , \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} , \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

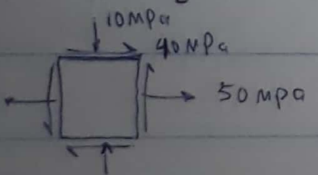
تنش سه بعدی:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) , \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

دایره مور

مثال: در حالت تنش صفحه ای داده شده:

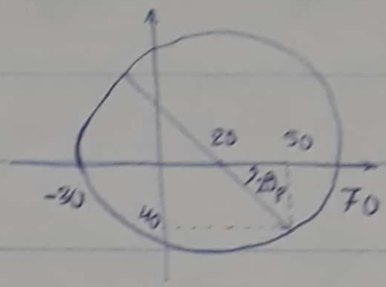


الف) صفحه های اصلی؟ ب) تنش های اصلی؟ ج) تنش برشی ماکزیمم؟

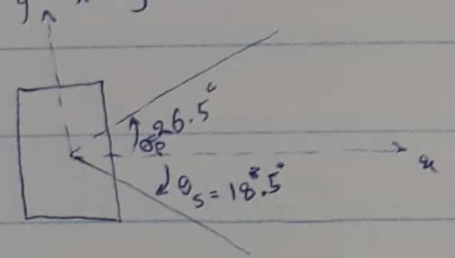
د) تنش عمودی متناظر با آن؟

$\sigma_x = 50\,mpa \longrightarrow \sigma_{ave} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 30\,mpa$

$\sigma_y = 10\,mpa \qquad R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\,mpa$



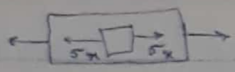
$\tan 2\theta_p = \dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \dfrac{80}{60} = \dfrac{4}{3} \longrightarrow 2\theta_p = 53^\circ \longrightarrow \theta_p = 26.5^\circ$



$\longrightarrow \tau_{xy_{max}} = 50\,mpa$

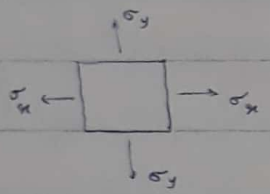
$\sigma_{max} = 70\ mpa \quad , \quad \sigma_{min} = -30\,mpa$

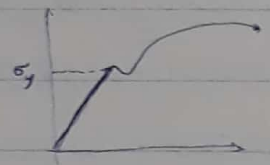
تنش ۱ بعدی:

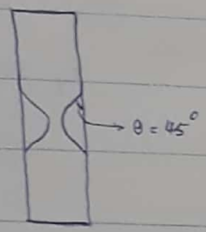


$\sigma_x \geq \sigma_y$ → yield

تنش ۲ بعدی:







مواد تغییر شکل پذیر
- $\tau_{max} < \tau_y$ معیار ترسکا
- معیار فون مایسز

مواد شکننده → معیار کولمب

(تنش برشی ماکس):

- براساس معیار ترسکا قطعه تا وقتی ایمن است که تنش برشی ماکزیمم در قطعه از مقدار متناظر تنش برشی در نمونه آزمایش کشش همان ماده در شروع تسلیم شدن کوچکتر باشد.

معیار ترسکا برای تنش های اصلی σ_a ، σ_b: اگر σ_a ، σ_b هم علامت باشند $\sigma_a < \sigma_y$ ، $\sigma_b < \sigma_y$ ، $\tau_{max} < \tau_y$

اگر σ_a و σ_b مختلف العلامت باشند: $|\sigma_a - \sigma_b| < \sigma_y$ → yield تسلیم

« براساس انرژی تغییر شکل »

معیار فون مایسز: (معیار انرژی اعوجاج ماکسیمم) اینکه قطعه تا وقتی ایمن است که انرژی اعوجاج ماکزیمم در واحد حجم آن ماده کوچکتر از انرژی اعوجاج در واحد حجم لازم برای تسلیم در نمونه‌ای از همان ماده، در آزمون کشش باقی بماند.

$$u_d = \frac{1}{6G}\left(\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2\right) \qquad u'_d = \frac{1}{6G}\sigma_y^2 \qquad , \quad u_d < u'_d$$

$$\rightarrow \sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_Y^2$$

→ yield، تسلیم

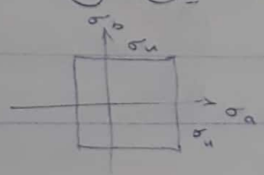
رابطه فون مایسز

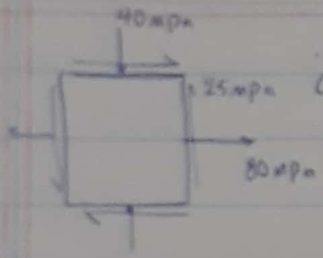
مواد شکننده:

معیار تنش عمودی ماکزیمم (معیار کولمب)، بر طبق این معیار، انهدام هنگامی رخ می‌دهد که بزرگترین تنش اصلی برابر با تنش نهایی ماده در آزمایش کشش ساده باشد.

$$|\sigma_a| < \sigma_u \quad , \quad |\sigma_b| < \sigma_u$$

→ ultimate





مثال: حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده در نقطه بحرانی از قطعه فولادی ماشین اتفاق افتاده است. براساس نتایج بدست آمده از چند آزمون کشش معین شده است استحکام تسلیم برای فولاد استفاده شده $\sigma_y = 250\ mpa$ می‌باشد، مطلوب است: ضریب اطمینان استفاده:

الف) معیار ترسکا را محاسبه کنید؟

ب) معیار اعوجاج ماکسیمم (فون مایسز) را محاسبه کنید؟

$$\sigma_{ave} = \frac{80-40}{2} = 20\ mpa$$

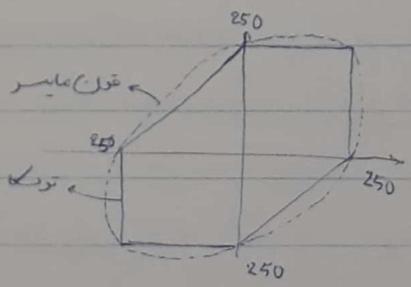
$$R = \sqrt{(80+40)^2 + 25^2} = 65\ mpa \longrightarrow \sigma_{max} = 85\ mpa \qquad \sigma_{min} = -45\ mpa$$

معیار ترسکا: $|\sigma_b - \sigma_a| < \sigma_y \longrightarrow |85+45| < 250 \longrightarrow 130 < 250$ ✓

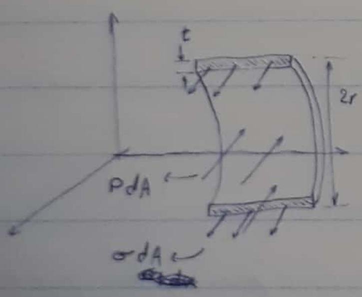
$$\longrightarrow F_s = \frac{\sigma_y}{|\sigma_b - \sigma_a|} = \frac{250}{130} = 1.92$$

معیار فون مایسز: $\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_y^2 \longrightarrow 85^2 + 85\times45 + 45^2 < 250^2 \longrightarrow 13075 < 62500$ ✓

$$\longrightarrow F_s^2 = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - \sigma_a\sigma_b} = \frac{62500}{13075} = 4.09 \longrightarrow F_s = 2.18$$



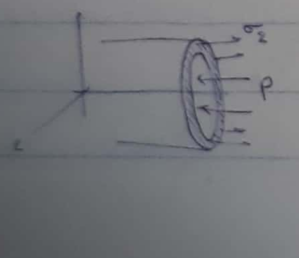
مخزن استوانه‌ای:



$$P(2r \cdot dx) - 2\sigma_1(t\,dx) = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{Pr}{t}$$

تنش حلقوی



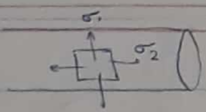
$$P(\pi r^2) = \sigma_2(2\pi r t)$$

$$\longrightarrow \sigma_2 = \frac{Pr}{2t}$$

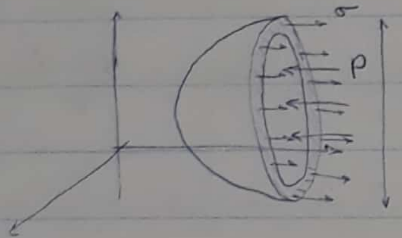
تنش طولی

براساس معیار ترسکا:

$\sigma_1 < \sigma_y$



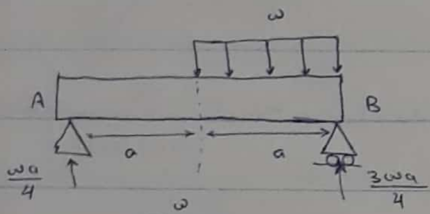
مخزن کروی

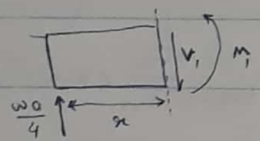


$$P(\pi r^2) - \sigma(2\pi r t) = 0$$

$$\longrightarrow \sigma = \frac{Pr}{2t}$$

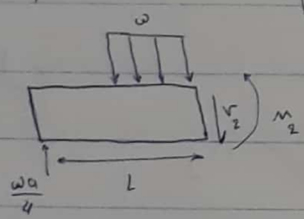
فصل دوم (۲):





$$V_1 = \frac{\omega a}{4}$$

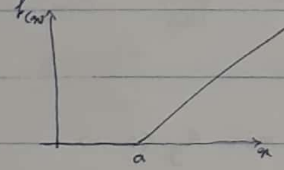
$$M_1 = \frac{\omega a}{4} x$$



$$V_2 = \frac{\omega a}{4} - \omega(x-a)$$

$$M_2 = \frac{\omega a}{4} x - \frac{\omega(x-a)^2}{4}$$

$$\langle x-a \rangle = \begin{cases} (x-a) & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$$



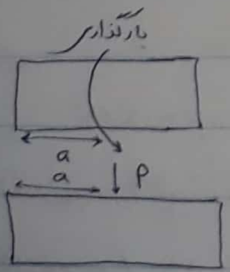
$$M(x) = \frac{\omega a}{4} x - \frac{\omega \langle x-a \rangle^2}{2} \quad , \quad V_{(x)} = \frac{\omega a}{4} - \omega \langle w-a \rangle$$

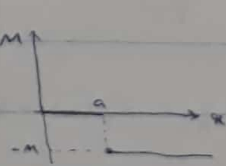
$$0 < x \leq a \longrightarrow M = \frac{\omega a}{4} x - 0 = M_1 \quad , \quad V = \frac{\omega a}{4} - 0 = V_1$$

$$a \leq x \leq 2a \longrightarrow M = \frac{\omega a}{4} x - \frac{\omega(x-a)^2}{2} = M_2 \quad , \quad V = \frac{\omega a}{4} - \omega(x-a) = V_2$$

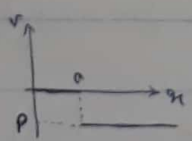
نیروی برشی

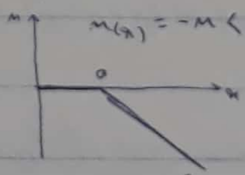
گشتاور خمشی





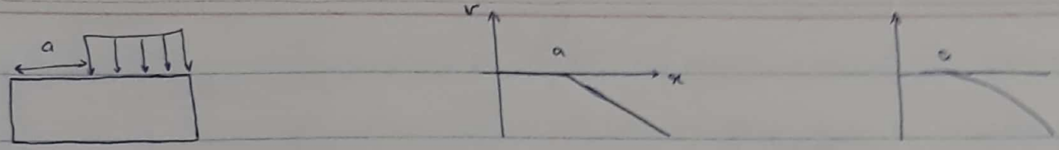
$M(x) = -M\langle x-a \rangle^0$





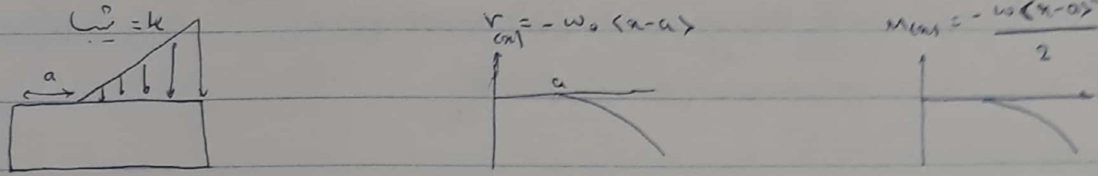
$V(x) = -P\langle x-a \rangle^0$

$M(x) = -P\langle x-a \rangle$

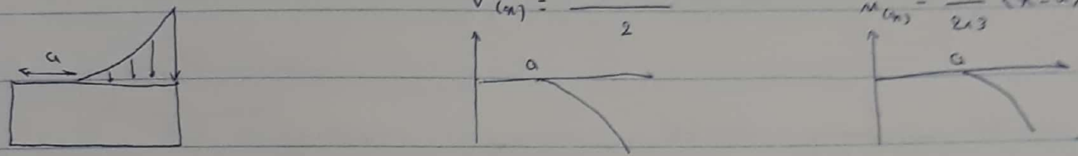


شیب $= k$

$V_{(x)} = -w_0 \langle x-a \rangle$ $\qquad$ $M_{(x)} = -\frac{w_0 \langle x-a \rangle^2}{2}$

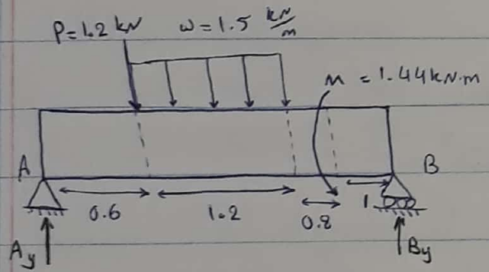


$V_{(x)} = \frac{-k \langle x-a \rangle^2}{2}$ $\qquad$ $M_{(x)} = \frac{-k}{2\times 3} \langle x-a \rangle^3$



$V_{(x)} = \frac{-k}{n+1} \langle x-a \rangle^{n+1}$ $\qquad$ $M_{(x)} = \frac{-k}{(n+1)(n+2)} \langle x-a \rangle^{n+2}$

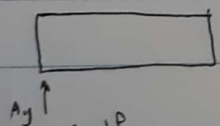
مثال:



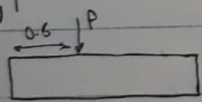
$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow A_y = 2.6\ kN$

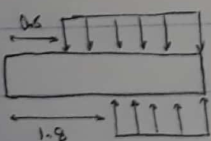
$\Sigma M_A = 0$



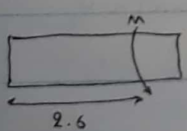
$M_1 = A_y \langle x-0 \rangle$



$M_2 = -P \langle x-0.6 \rangle$



$M_3 = \frac{-w_0 \langle x-0.6 \rangle^2}{2} + \frac{w_0 \langle x-1.8 \rangle^2}{2}$



$M_4 = -M_0 \langle x-2.6 \rangle^0$

$\longrightarrow M_{(x)} = A_y \langle x \rangle - P\langle x-0.6 \rangle - \frac{w \langle x-0.6 \rangle^2}{2} + \frac{w \langle x-1.8 \rangle^2}{2} - M_0 \langle x-2.6 \rangle^0$

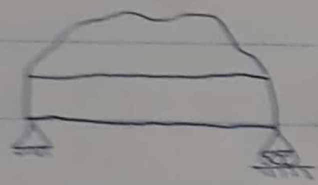
* معمولاً جدول داده نمی‌شود، پس بهتر است جدول را بلد باشیم، در حالت کلی می‌توان نیرو را جزء جزء نکرد و به صورت سری همان عبارات آن بلافاصله را نوشت.

* در صورتی که ممان متمرکز داشتیم برای تعیین کردن محل آن از براکت شکسته و عبارت در صورت آن که شامل $\langle x-a \rangle^0$ می‌باشد استفاده می‌کنیم.

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=\int -w_{(x)}dx+C_1 \quad , \quad EI\frac{d^2y}{dx^2}=\int dx\int -w_{(x)}dx+C_1x+C_2$$

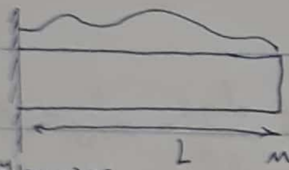
$$EI\frac{dy}{dx}=\int dx\int dx\int -w_{(x)}dx+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

$$EIy_{(x)}=\int dx\int dx\int dx\int -w_{(x)}dx+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$



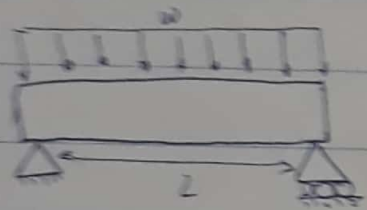
$y_{(x=0)}=0 \qquad y_{(x=L)}=0$

$M_{(x=0)}=0 \qquad M_{(x=L)}=0$



$y_{(x=0)}=0 \qquad M_{(x=L)}=0$

$\theta_{(x=0)}=0 \qquad V_{(x=L)}=0$



مثال

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=-w_{(x)} \longrightarrow EI\frac{d^4y}{dx^4}=-w_0 \longrightarrow EI\frac{d^3y}{dx^3}=-w_0x+C_1$$

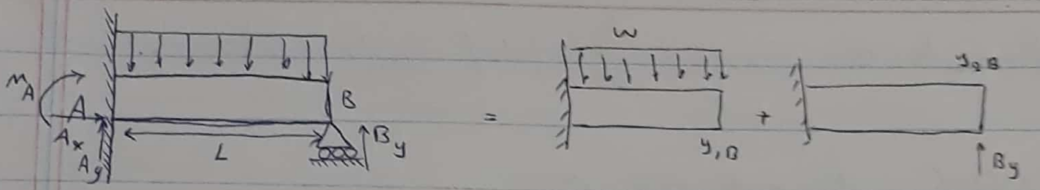
$$\longrightarrow EI\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{w_0}{2}x^2+C_1x+C_2 \longrightarrow EI\frac{dy}{dx}=\frac{-w_0}{6}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

$$\longrightarrow EIy_{(x)}=\frac{-w_0}{24}x^4+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

$$\longrightarrow M_{(x=0)}=0 \longrightarrow C_2=0 \quad , \quad M_{(x=L)}=0 \longrightarrow \frac{-wL^2}{2}+C_1L=0 \longrightarrow C_1=\frac{wL}{2}$$

$$y_{(x=0)}=0 \longrightarrow C_4=0 \quad , \quad y_{(x=L)}=0 \longrightarrow \frac{-wL^4}{24}+\frac{wL}{2}\times\frac{L^3}{6}+C_3\times L=0 \longrightarrow C_3=\frac{-wL^3}{24}$$

$$\longrightarrow EIy_{(x)}=\frac{-w_0x^4}{24}+\frac{wL}{2}\frac{x^3}{6}-\frac{wL^3}{24}x$$



حل:

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \longrightarrow A_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \longrightarrow A_y + B_y - \omega_0 L = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \longrightarrow M_A + B_y \times L - \frac{\omega_0 L^2}{2} = 0 \end{cases} \quad , \quad y_B = 0$$

$$\longrightarrow M_{(x)} = A_y x - M_A - \frac{w x^2}{2}$$

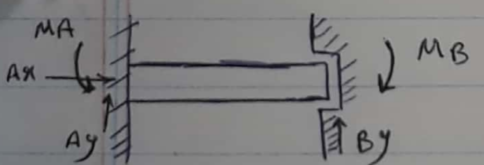
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_{(x)}}{EI} \longrightarrow EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M_{(x)} = A_y x - M_A - \frac{w x^2}{2}$$

$$EI \frac{dy}{dx} = A_y \frac{x^2}{2} - M_A x - \frac{w x^3}{6} + C_1$$

$$EI y_{(x)} = A_y \frac{x^3}{6} - M_A \frac{x^2}{2} - \frac{w x^4}{24} + C_1 x + C_2$$

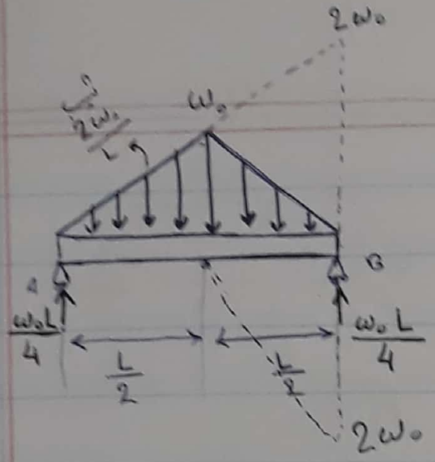
$$y_{(x=0)} = 0 \longrightarrow C_2 = 0 \quad , \quad \theta_{(x=0)} = 0 \longrightarrow C_1 = 0$$

$$\longrightarrow EI y_{(x)} = A_y \frac{x^3}{6} - M_A \frac{x^2}{2} - \frac{w x^4}{24}$$



$y_B = 0$

$\theta_B = 0$



$y_{(x)} = ?$, $\theta_A = ?$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$M(x) = \frac{w_0Lx}{4} - \frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle x - \frac{L}{2}\rangle^3$$

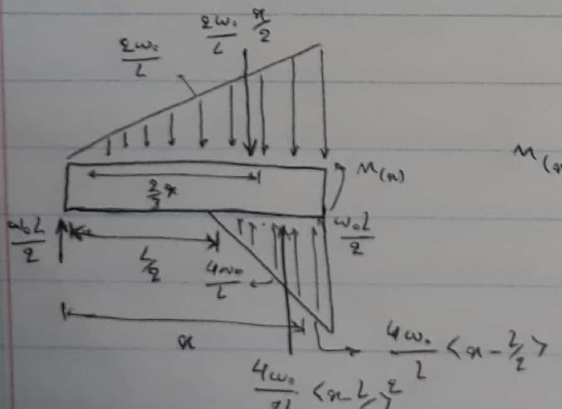
$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_{(x)} = \frac{w_0L}{4}x - \frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle x - \frac{L}{2}\rangle^3$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{w_0L}{8}x^2 - \frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0}{6L}\langle x - \frac{L}{2}\rangle^4 + C_1$$

$$EI\,y_{(x)} = \frac{w_0L}{24}x^3 - \frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0}{30L}\langle x - \frac{L}{2}\rangle^5 + C_1x + C_2$$

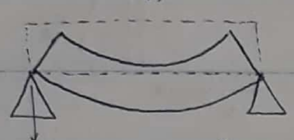
$$y_{(x=0)} = 0 \longrightarrow C_2 = 0 \quad , \quad y_{(x=L)} = 0 \longrightarrow C_1 = \frac{-5}{192}wL^3$$

$$\longrightarrow EI\,y_{(x)} = \frac{w_0L}{24}x^3 - \frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0}{30}\langle x - \frac{L}{2}\rangle^5 - \frac{5}{192}wL^3x$$



$$M_{(x)} = \frac{w_0L}{4}x - \frac{2w_0L^2}{2L}\frac{x}{3} + \frac{4w_0}{2L}\langle x-\frac{L}{2}\rangle^2\frac{\langle x-\frac{L}{2}\rangle}{3}$$

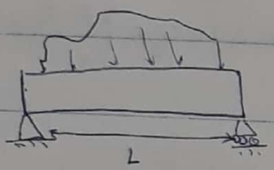
تغییر شکل تیرها:

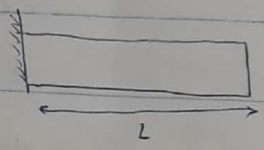


$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{(x)}}{EI}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\cancel{\frac{dy}{dx}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \simeq \frac{d^2y}{dx^2} \longrightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_{(x)}}{EI}}$$

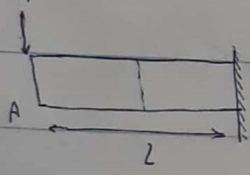
$$\theta_{(x)} = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M_{(x)}}{EI}\,dx + C_1 \longrightarrow y_{(x)} = \int dx \int \frac{M_{(x)}}{EI}\,dx + C_1 x + C_2$$

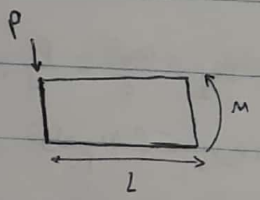




$y(x=0)=0$ $\quad y(x=L)=0$ $\qquad y(x=0)=0$ $\quad \theta(x=0)=0$

مثال:





$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-Px}{EI} \longrightarrow \theta_{(x)} = \frac{dy}{dx} = \int \frac{-Px}{EI} + C_1 = \frac{-Px^2}{2EI} + C_1$$

$$\rightarrow y = \int \frac{-Px^2}{2EI} + C_1x + C_2 = \frac{-Px^3}{6EI} + C_1x + C_2$$

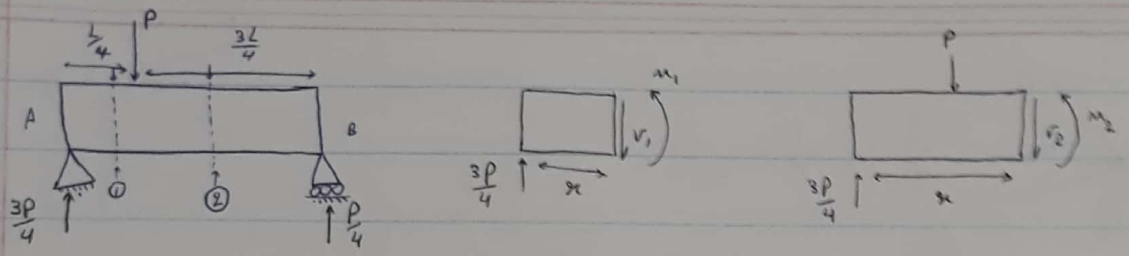
$$\theta_{(x=L)} = 0 \longrightarrow \frac{-PL^2}{2EI} + C_1 = 0 \longrightarrow C_1 = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$y_{(x=L)} = 0 \longrightarrow \frac{-PL^3}{6EI} + \frac{PL^2}{2EI} \times L + C_2 = 0 \longrightarrow C_2 = \frac{-PL^3}{3EI}$$

$$\rightarrow y_{(x)} = \frac{-Px^3}{6EI} + \frac{PL^2}{2EI}x - \frac{PL^3}{3EI}$$

$$\rightarrow \theta_A = \theta_{(x=0)} = \frac{-Px^2}{2EI} + \frac{PL^2}{2EI}\Big|_{x=0} = \frac{PL^2}{2EI} \quad , \quad y_A = y_{(x=0)} = \frac{-PL^3}{3EI}$$

مثال:



$$M_1 = \frac{3P}{4}x \qquad M_2 = \frac{3P}{4}x - P\left(x - \frac{L}{4}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_{(x)}}{EI} \longrightarrow EI\frac{d^2y_1}{dx^2} = M_1 = \frac{3P}{4}x \longrightarrow \begin{cases} EI\dfrac{dy}{dx} = \displaystyle\int \frac{3P}{4}x\,dx + C_1 = \frac{3Px^2}{8} + C_1 \\[2ex] EIy_1 = \displaystyle\int \frac{3P}{8}x^2\,dx + C_1x + C_2 = \frac{3P}{24}x^3 + C_1x + C_2 \end{cases}$$

$$EI\frac{d^2y_2}{dx^2} = M_2 = \frac{3P}{4}x - P\left(x - \frac{L}{4}\right) \longrightarrow \begin{cases} EI\dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{3}{8}Px^2 - \dfrac{P}{2}\left(x - \dfrac{L}{4}\right)^2 + C_3 \\[2ex] EIy_2 = \dfrac{Px^3}{8} - \dfrac{P}{6}\left(x - \dfrac{L}{4}\right)^3 + C_3x + C_4 \end{cases}$$

می‌بینیم که چهار معادله چهار مجهول خواهیم داشت، پس بهتر است که از این روش استفاده نکرده و از روش معتبرتری استفاده کنیم (روش براکت شکسته).

* روش براکت شکسته:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_{(x)}}{EI} \longrightarrow M_{(x)} = \frac{d^2y}{dx^2}EI = \frac{3P}{4}\langle x\rangle - P\left\langle x - \frac{L}{4}\right\rangle$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx}EI = \frac{3P}{8}\langle x\rangle^2 - \frac{P}{2}\left\langle x - \frac{L}{4}\right\rangle^2 + C_1 \longrightarrow yEI = \frac{P}{8}\langle x\rangle^3 - \frac{P}{6}\left\langle x - \frac{L}{4}\right\rangle^3 + C_1x + C_2$$

$$y_{(x=0)} = 0 \longrightarrow C_2 = 0 \quad , \quad y_{(x=L)} = 0 \longrightarrow \frac{P}{8}L^3 - \frac{P}{6}\left(\frac{3L}{4}\right)^3 + C_1L = 0 \longrightarrow C_1 = \frac{7PL^2}{128}$$

تعیین منحنی کشسان تیر به کمک توزیع بار:

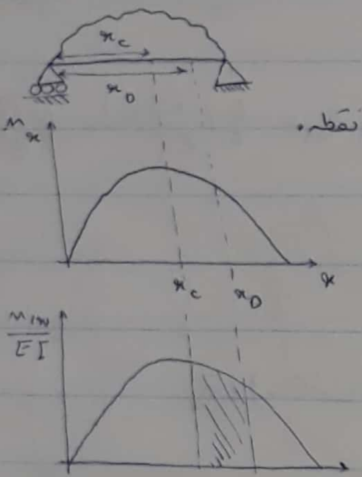
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_{(x)}}{EI} \quad , \quad \frac{dM_{(x)}}{dx} = V_{(x)} \quad , \quad \frac{dV_{(x)}}{dx} = -\omega_{(x)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{EI}\frac{dM_{(x)}}{dx} = \frac{V_{(x)}}{EI} \quad , \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{EI}\frac{dV_{(x)}}{dx} = \frac{-\omega_{(x)}}{EI} \longrightarrow \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{-\omega_{(x)}}{EI}$$

تغییر مکان تیر به روش گشتاور سطح،

گشتاور سطح:

قضیه اول ✓ اختلاف زاویه با شیب بین دو نقطه C و D از تیر برابر است با سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ بین دو نقطه.

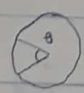


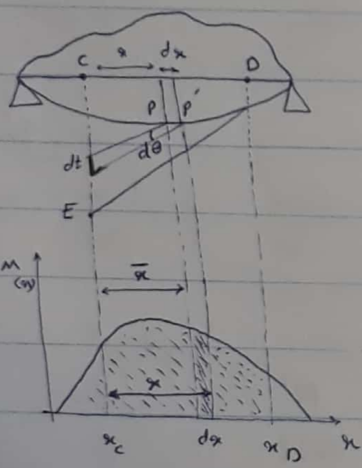
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \qquad \frac{dy}{dx} = \theta_{(x)}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \qquad d\theta = \frac{M(x)}{EI}\,dx$$

$$\int_{\theta_c}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_c}^{x_D} \frac{M(x)}{EI}\,dx = \theta_D - \theta_C = \theta_{D/C}$$

مثال:



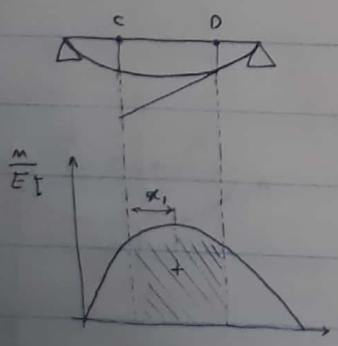


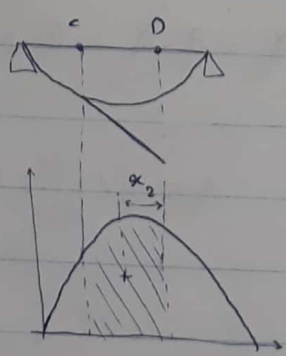
$$dt = x \cdot d\theta$$

$$dt = x\,\frac{M(x)}{EI}\,dx$$

$$t_{D/C} = \int_{x_c}^{x_D} x\,\frac{M(x)}{EI}\,dx$$

قضیه دوم گشتاور سطح: فاصله عمودی نقطه C از مماس بر نقطه D در تیر روبرو برابر است با گشتاور اول سطح بین نقاط D و C نسبت به قائم در نقطه C

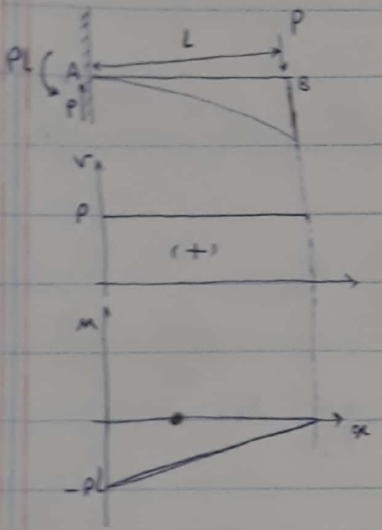




$t_{C/D} = ($ مساحت بین $x_D, x_c) \times x_1$

$t_{D/C} = ($ مساحت بین $x_D, x_c) \times x_2$

$\theta_B = 0 \quad y_B = 0$



$\theta_{C/D} = ($

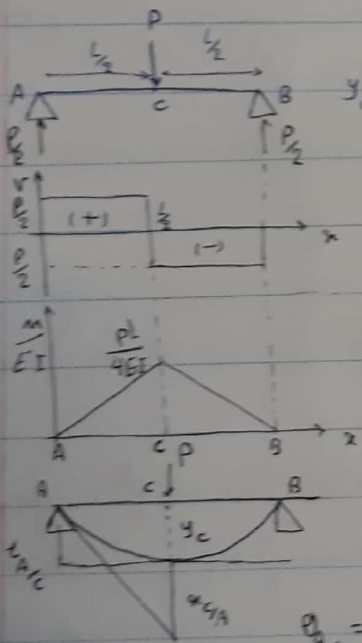
$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = A_{AB}$, $A_{AB} = -\frac{1}{2}\left(\frac{PL}{EI}\right) \times L = -\frac{1}{2}\frac{PL^2}{EI}$

$\rightarrow \theta_B = \frac{-PL^2}{2EI}$

$y_B = t_{B/A} =$ (مساحت زیر نمودار $\frac{m}{EI}$ بین x_A و x_B) $\times \bar{x}_B$

$t_{B/A} = A_{AB} \times \left(\frac{2}{3}L\right)$, $A_{AB} = \frac{-PL^2}{2EI} \rightarrow y_B = t_{B/A} = \frac{-PL^3}{3EI}$

مثال



$y_c = ?$ $\theta_A = ?$

$t_{A/C} = A_{AC} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{L}{2}\right)$

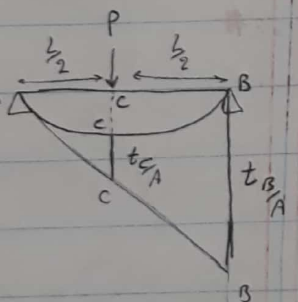
$A_{AC} = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right) \times \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL^2}{16EI}$

$y_c = t_{A/C} = \frac{PL^2}{16EI} \times \frac{L}{3} = \frac{PL^3}{48EI}$

$\theta_{A/C} = \theta_A - \theta_C = \theta_A = A_{AB} = \frac{PL^2}{16EI}$

—

$t_{B/A} = A_{AB} \times \left(\frac{L}{2}\right)$, $A_{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right)(L) = \frac{PL^2}{8EI}$



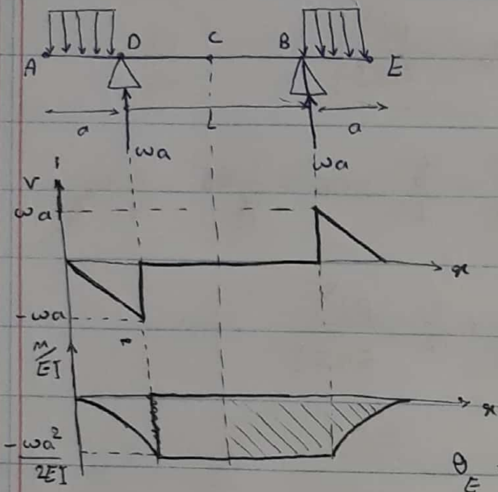
$t_{B/A} = \frac{PL^3}{16EI}$

$ABB' \sim ACC'' \rightarrow \frac{CC''}{BB'} = \frac{AC}{AB} = \frac{L/2}{L} \rightarrow CC'' = \frac{1}{2}BB' = \frac{1}{2}t_{B/A} = \frac{PL^3}{32EI}$

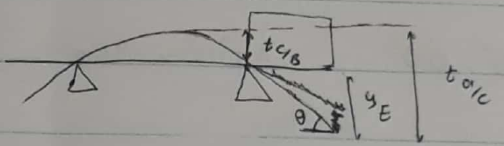
$$y_C = cc' - t_{C/A} \qquad t_{C/A} = A_{AC} \times \frac{L}{6} \ , \qquad A_{AC} = \frac{PL^2}{16EI}$$

$$t_{C/A} = \frac{PL^3}{96EI} \longrightarrow y_C = cc' - t_{C/A} = \frac{PL^3}{48EI}$$

مثال:



$$\theta_E = ? \qquad y_E = ?$$



$$\theta_{E/C} = \theta_E - \cancel{\theta_C}$$

به علت بارگذاری متقابل، y_{max} در وسط تیر است

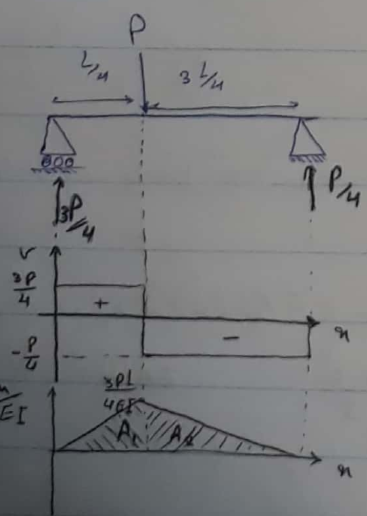
$$\theta_E = \theta_{E/C} = A_{EC} = A_1 + A_2 = \frac{-wa^2L}{4EI} - \frac{wa^3}{6EI} = \frac{-wa^2}{12EI}(3L+2a)$$

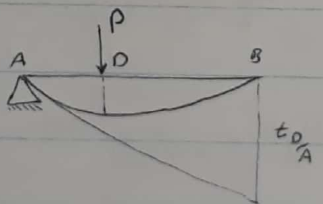
$$A_1 = \frac{-wa^2}{2EI} \times \frac{L}{2} = \frac{-wa^2L}{4EI} \qquad A_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{wa^2}{2EI}\right)(a) = \frac{wa^3}{6EI}$$

$$y_E = t_{E/C} - t_{D/C} \rightarrow \qquad t_{E/C} = A_1 \times \left(\frac{L}{4} + a\right) + A_2 \times \left(\frac{3a}{4}\right) = -\frac{wa^3L}{4EI} - \frac{wa^2L^2}{16EI} - \frac{wa^4}{8EI}$$

$$t_{D/C} = A_1 \times \frac{L}{4} \longrightarrow y_C = \frac{-wa^3}{8EI}(3L+a)$$

مثال:





$$\theta_{D/A} = \theta_D - \theta_A$$

$$t_{B/A} = A_1\left(\frac{L}{12} + \frac{3L}{4}\right) + A_2\left(\frac{2}{3} \times \frac{3L}{4}\right)$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3PL}{16EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{3PL^2}{128EI}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3PL}{16EI}\right)\left(\frac{3L}{4}\right) = \frac{9PL^2}{128EI}$$

$$t_{B/A} = \frac{7PL^3}{128EI}$$

$$\tan\theta_A = \theta_A = \frac{t_{B/A}}{L} \longrightarrow \boxed{\theta_A = \frac{7PL^3}{128EI}}$$

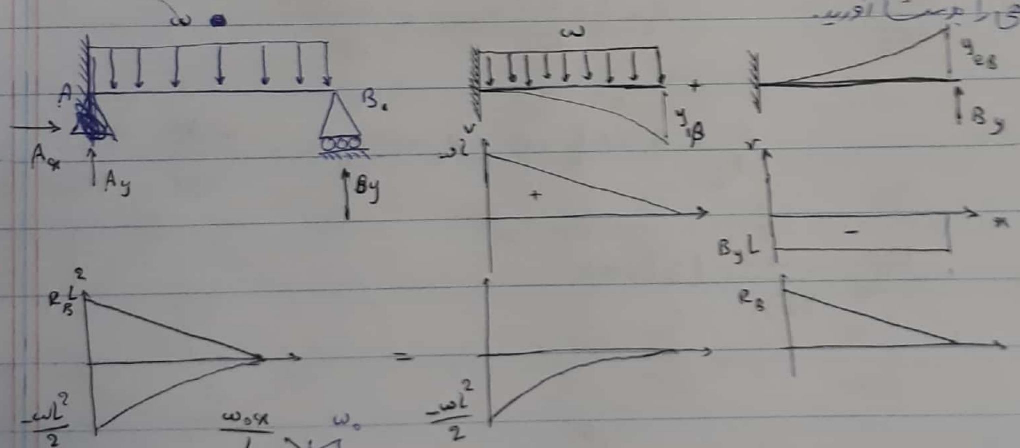
$$\theta_{D/A} = \theta_D - \theta_A \qquad A_1 = \theta_D - \frac{7PL^3}{128EI} \longrightarrow \boxed{\theta_D = \frac{-PL^3}{32EI}}$$

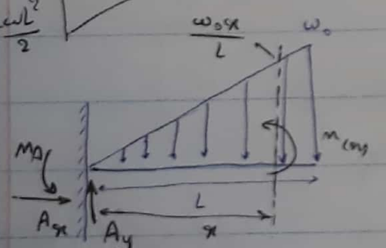
$$y_D = DD'' - D'D'' \qquad A\overset{\Delta}{D}D'' \sim ABB' \longrightarrow \frac{DD''}{BB'} = \frac{L/4}{L} \longrightarrow DD'' = \frac{1}{4}BB' = \frac{1}{4}t_{B/A}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{7PL^3}{128EI} = DD'' \qquad t_{D/A} = A_1 \times \frac{L}{12} = \frac{3PL^3}{128EI} \times \frac{L}{12} = \frac{PL^3}{512EI}$$

$$\longrightarrow y_D = DD'' - t_{D/A} = \frac{-3PL^3}{256EI}$$

مثال: نمودار لنگرها را بدست آورید.





مثال: معادله انتگرال‌گیری $y_{(x)}$ را بدست آورید.

$$\Sigma F_y = A_y - \frac{\omega_0 L}{2} = 0 \longrightarrow A_y = \frac{\omega_0 L}{2} \qquad \Sigma F_x = 0 \longrightarrow A_x = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow M_A - \frac{\omega_0 L}{2}\left(\frac{2L}{3}\right) = 0 \longrightarrow M_A = \frac{\omega_0 L^2}{3}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_{(x)}$$

$$M_{(x)} + M_A - A_y x + \frac{w x^2}{2L}\left(\frac{x}{3}\right) = 0 \rightarrow M_{(x)} = A_y x - M_A - \frac{w_0 x^3}{6L}$$

$$\rightarrow EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_{(x)} = A_y x - M_A - \frac{w_0 x^3}{6L} = \frac{w_0 L}{2} x - \frac{w_0 L^3}{3} - \frac{w_0 x^3}{6L}$$

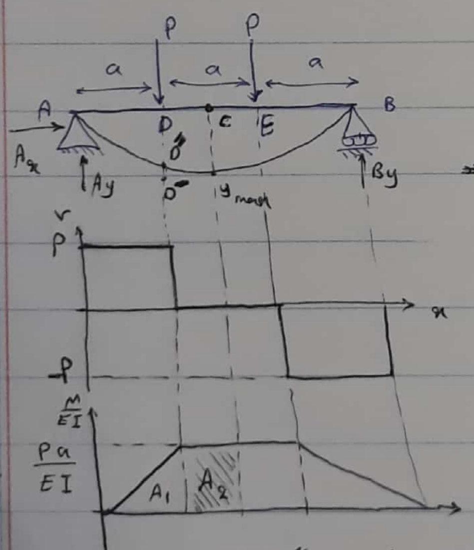
$$\rightarrow EI \frac{dy}{dx} = \frac{w_0 L}{4} x^2 - \frac{w_0 L^3 x}{3} - \frac{w_0 x^4}{24L} + C_1$$

$$\rightarrow EI\, y = \frac{w_0 L}{12} x^3 - \frac{w_0 L^3 x^2}{6} - \frac{w_0 x^5}{120L} + C_1 x + C_2$$

$$x=0 \rightarrow y=0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad , \quad x=0 \rightarrow \theta = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y_{(x)} = \frac{w_0 L x^3}{12} - \frac{w_0 L^3 x^2}{6} - \frac{w_0 x^5}{120L}$$

مثال: θ_D و y_D را با روش گشتاور سطح بیابید.



به علت تقارن بار: $\rightarrow A_x = 0 \,,\, A_y = P \,,\, B_y = P$

$$\theta_D = \theta_{D/C} + \cancel{\theta_C} = A_2$$

$$A_2 = \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{Pa}{EI}\right) = \frac{Pa^2}{2EI} = \theta_D$$

$$y_D = DD'' = DD' - D'D'' \rightarrow DD' = y_{max} = t_{A/C} = A_1\left(\frac{3}{2}a\right) + A_2\left(\frac{5a}{4}\right)$$

$$\rightarrow D'D'' = t_{D/C} = A_2\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{Pa^2}{2EI}\left(\frac{a}{4}\right)$$

$$\rightarrow DD'' = DD' - t_{D/C} = \frac{5}{6}\left(\frac{Pa^3}{EI}\right)$$